



Opgavesettet har 11 punkter, 1abc, 2ab, 3, 4, 5ab, 6ab, som teller likt ved bedømmelsen.

1 a) Vi regner ut $F(s)$ og $g(t)$ ved å bruke tabell og reglene for Laplacetransformasjonen.

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin t + t \cos t) = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1 - s^2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{2s^2}{(s^2 + 1)^2}$$
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 1} e^{-2\pi s} \right) = \cos t - \cos(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$$
$$= [1 - u(t - 2\pi)] \cos t = \begin{cases} \cos t & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

b) Vi setter $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ og Laplacetransformerer ligningen ved bl.a. å bruke skiftteorem 2 siden $r(t) = 2 \cos t [1 - u(t - 2\pi)] = 2 \cos t - 2 \cos(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$. (Eller ved å bruke resultatet fra a) siden $r(t) = 2g(t)$.)

$$sY + \frac{1}{s}Y = \frac{2s}{s^2 + 1} (1 - e^{-2\pi s}) \Rightarrow Y = \frac{2s^2}{(s^2 + 1)^2} (1 - e^{-2\pi s}) = F(s) (1 - e^{-2\pi s})$$

Ved inverstransformeringen bruker vi skiftteorem 2 og $\mathcal{L}^{-1}(F) = f(t)$ fra a).

$$y = (\sin t + t \cos t) - [\sin(t - 2\pi) + (t - 2\pi) \cos(t - 2\pi)] u(t - 2\pi)$$
$$= (\sin t + t \cos t) - [\sin t + (t - 2\pi) \cos t] u(t - 2\pi) = \begin{cases} \sin t + t \cos t & (0 < t < 2\pi) \\ 2\pi \cos t & (t > 2\pi) \end{cases}$$

c) Vi setter igjen $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ og Laplacetransformerer ligningen.

$$s^2 Y - s + 4(sY - 1) + 8Y = 2e^{-2\pi s} \Rightarrow Y = \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 8} + \frac{2}{s^2 + 4s + 8} e^{-2\pi s}$$

Vi omformer Y og inverstransformerer ved hjelp av begge skiftteoremene.

$$Y = \frac{(s + 2) + 2}{(s + 2)^2 + 2^2} + \frac{2}{(s + 2)^2 + 2^2} e^{-2\pi s}$$
$$y = e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t) + e^{-2(t-2\pi)} \sin 2(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$$
$$= e^{-2t} [\cos 2t + \sin 2t + e^{4\pi} \sin 2t u(t - 2\pi)]$$

Svaret er altså

$$y = \begin{cases} e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t) & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ e^{-2t} (\cos 2t + (1 + e^{4\pi}) \sin 2t) & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

- 2 a) Funksjonene $u(x, y) = y$ og $u(x, y) = \cos nx \sinh ny$ oppfyller (i), (ii) og (iii). De to andre funksjonene oppfyller (i) og (ii), men ikke (iii).

For å finne en løsning som også oppfyller (iv), betrakter vi summen

$$u(x, y) = C_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx \sinh ny$$

og bestemmer konstantene C_n for $n = 0, 1, 2, \dots$ slik at $u(x, \pi) = 1 - \cos 2x$.

$$1 - \cos 2x \stackrel{\text{(iv)}}{=} u(x, \pi) = C_0 \pi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx \sinh n\pi \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1/\pi \\ C_2 = -1/\sinh 2\pi \\ C_n = 0 \text{ for } n \neq 0, 2 \end{cases}$$

En funksjon som er løsning av (i) og oppfyller randbetingelsene (ii), (iii) og (iv) er dermed

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} - \frac{\cos 2x \sinh 2y}{\sinh 2\pi}.$$

- b) Vi setter inn $u(x, y) = F(x)G(y)$ i (i) og bruker randbetingelsene (ii) og (v).

$$F''G' + FG'' = 0 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k \quad (\text{konstant})$$

$$\text{(I)} \quad F'' - kF = 0, \quad F(0) \stackrel{\text{(v)}}{=} 0, \quad F'(\pi) \stackrel{\text{(v)}}{=} 0, \quad \text{(II)} \quad G'' + kG = 0, \quad G(0) \stackrel{\text{(ii)}}{=} 0$$

Bestemmer først $F(x)$ og deretter $G(y)$.

$$\text{(I)} \quad F'' - kF = 0, \quad F(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0$$

$$k > 0, \quad k = \mu^2: \quad F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \quad F'(x) = \mu Ae^{\mu x} - \mu Be^{-\mu x}$$

$$F(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0, \quad F(x) = 0$$

$$k = 0: \quad F(x) = A + Bx, \quad F'(x) = B$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad F(x) = 0$$

$$k < 0, \quad k = -p^2: \quad F(x) = A \cos px + B \sin px, \quad F'(x) = -pA \sin px + pB \cos px$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0, \quad A = 0, \quad B \neq 0 \Rightarrow \cos p\pi = 0$$

$$p = (2m + 1)/2, \quad F(x) = \sin[(2m + 1)x/2] \quad (B = 1)$$

$$\text{(II)} \quad G'' + kG = 0, \quad k = -[(2m + 1)/2]^2, \quad G(0) = 0$$

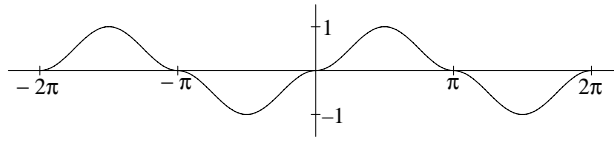
$$G'' - \left(\frac{2m + 1}{2}\right)^2 G = 0 \Rightarrow G(y) = Ae^{(2m+1)y/2} + Be^{-(2m+1)y/2}$$

$$G(0) = 0 \Rightarrow B = -A, \quad G(y) = A(e^{(2m+1)y/2} - e^{-(2m+1)y/2}) = C \sinh[(2m + 1)y/2]$$

Løsningene av (i) på formen $u(x, y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (ii) og (v):

$$u(x, y) = C \sin \frac{(2m + 1)x}{2} \sinh \frac{(2m + 1)y}{2}, \quad C \text{ vilkårlig konstant, } m = 0, 1, 2 \dots$$

- 3] Summen av Fouriersinusrekke er den odde 2π -periodiske utvidelsen av $f(x)$.



For $x = \pi/2$ er $f(x) = 1$ og $\sin(2m+1)x = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$. Ergo er

$$1 = -\frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} = \frac{\pi}{8}.$$

- 4] Ligningen kan skrives $f(x) = e^{-|x|} - 4f(x) * e^{-|x|}$. Vi setter $\hat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ og Fouriertransformerer ligningen ved å bruke konvolusjonsregelen og den oppgitte Fouriertransformerte.

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+w^2} - 4\sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+w^2}$$

$$\left(1 + \frac{8}{1+w^2}\right) \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+w^2}$$

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{9+w^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3}{3^2+w^2} \implies f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \frac{1}{3} e^{-3|x|}$$

der vi inverstransformerte ved hjelp av den oppgitte Fouriertransformerte med $a = 3$.

- 5] a) Eulers metode er

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, t_n).$$

Vi har $x_0 = 1$, $t_0 = 0$. To skritt med $h = 0.1$ gir

$$x_1 = x_0 + h \cdot f(x_0, t_0) = 1 + 0.1 \cdot [-2 \cdot 0.1 + 0 + 4] = 2$$

$$x_2 = x_1 + h \cdot f(x_1, t_1) = 1.44$$

- b) Heuns metode er

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}h [K_1 + K_2]$$

hvor

$$K_1 = f(x_n, t_n)$$

$$K_2 = f(x_n + h \cdot f(x_n, t_n), t_{n+1}).$$

Ett skritt med $h = 0.1$ gir

$$\begin{aligned}K_1 &= f(x_0, t_0) = 2 \\K_2 &= f(x_0 + hf(x_0, t_0), t_1) = f(1.2, 0.1) = 2.4 \\x_1 &= x_0 + \frac{1}{2}h[K_1 + K_2] = 1.22.\end{aligned}$$

Eksakt løsning er $x(0.1) = 1.2187$.

Feil for Eulers metode er

$$e_1 = |1.2 - 1.2187| = 0.0187.$$

Feil for Heuns metode er

$$e_1 = 0.0013.$$

Vi ser at Heuns metode gir bedre tilnærming fordi den er av høyere orden enn Eulers metode.

6 a) Formelen ser vi ved å flette annenhvert ledd for T_n og U_n .

b) Vi beregner først $T_1 = \frac{h}{2}(f(0) + f(1)) = 0$. Deretter

$$\begin{array}{l|l}T_2 = \frac{T_1+U_1}{2} = 0.353553 & T_{16} = \frac{T_8+U_8}{2} = 0.502804 \\T_4 = \frac{T_2+U_2}{2} = 0.470745 & T_{32} = \frac{T_{16}+U_{16}}{2} = 0.5043429384 \\T_8 = \frac{T_4+U_4}{2} = 0.496588 & T_{64} = \frac{T_{32}+U_{32}}{2} = 0.504726\end{array}$$

Vi finner

$$T_{64} + \frac{T_{64} - T_{32}}{3} = 0.504854$$

så alle 6 siffer er korrekte. Dette skyldes at man generelt har formelen

$$S_{2n} = T_{2n} + \frac{T_{2n} - T_n}{3}$$

dvs Simpsons formel med $2n$ punkter. Dette er en 4. ordens metode, mens trapesmetoden kun er 2. ordens.